9. Domača naloga pri predmetu Matematične metode v računalništvu

Slavko Žitnik
63060254

11. maj 2011

Naloga 1

Pokaži, da naslednji parametriziran problem pripada razredu FPT:
vhod: Graf G z n točkami
parameter: k
izhod: Odloči, ali je kromatično število grafa $\chi(G) \leq n - k$.
Namig: Dovolj je poiskati jedro problema z uporabo redukcije s krono.

Dokaz. Vemo, da je vsak odločljiv problem v razredu FPT natanko tedaj, ko zanj obstaja jedro. Torej pripadnost tega problema FPT problemom pokažimo tako, da poiščemo jedro z redukcijo krone.

Naj bo $\overline{G}$ dualni graf grafa G. Torej vsebuje iste točke kot G in sta dve točki sosednji natanko tedaj, ko nista v G in obratno.

Na dualnem grafu poiščemo kronsko redukcijo, kot smo jo naredili na predavanjih (1. požrešno iskanje prirejanja, 2. konstrukcija dvodelnega grafa, 3. v dvodelnem grafu poiščemo maksimalno prirejanje oz. minimalno pokritje (König), 4. razberemo množice C, H, B).

V kroni C imamo potem točke, ki so medseboj nepovezane, torej v grafu G tvorijo kliko. Zato moramo vsako od teh točk pobarvati z različno barvo in porabimo $|C|$ barv. Zaradi prirejanja med C in H, lahko tedaj točke iz H pobarvamo z istimi barvami, kot smo jih uporabili za C. To zaradi tega, ker tisti točki, ki sta v $\overline{G}$ v prirejanju, v G nista povezani in lahko zanji uporabimo isto barvo. Množico B pa pobarvajmo z novimi barvami. Dobili smo jedro problema $(B, k - |H|)$, torej točke iz telesa in preostanek barv, ki jih moramo prihraniti.

Pokazali smo tudi že, da je krono dovolj poiskati le enkrat. Torej lahko za rešitev naš problem trdimo, da v primeru, ko je $|H| = k$, lahko prihranimo k barv, saj imamo možnost k točk iz H pobarvati z istimi barvami kot v C. □

Naloga 2

Družini množic $S = S_1, S_2, ..., S_l$ pravimo sončnica moči l s središčem C, če vsak različen par elementov velja $S_i \cap S_j = C$.

Pokaži naslednjo lemo (Sunflower lemma, Erdős-Rado lemma): Naj bo ϵ družina množic, ki vsebuje vsaj $(p-1)^d \cdot d!$ elementov, pri čemer naj za vsak $E \in \epsilon$ velja $|E| \leq d$. Pokaži, da v ϵ najdemo sončnico moči vsaj p.

Dokaz. Lemo bomo pokazali z indukcijo po d.

Za $d = 2$: Imamo $(p-1)^2 \cdot 2$ ali več elementov (t.j. različnih množic z močjo ≤ 2). Naj imamo v tej družini množic le množice z močjo 1. V tem primeru lahko poljubno izberemo p množic in iz njih sestavimo sončnico s praznim jedrom.

Za $d \geq 2$: Naj bo ε družina množic, za katero velja

$$|\varepsilon| \geq (p-1)^{d+1} \cdot (d+1)!$$

in za vsako $E \in \varepsilon$, $|E| = d+1$. Naj bo $F = \{F_1, F_2, ..., F_l\}$ maksimalna družina paroma različnih elementov iz ε. Če $l \geq p$, potem smo našli sončnico moči vsaj p. Če pa je $l < p$, potem pa naj bo $W := F_1 \cup ... \cup F_l$ in vemo, da velja $|W| \leq (p-1) \cdot (d+1)$. Iz maksimalnosti F sledi, da ima vsaka F_i neprazen presek z W. Torej obstaja nek element $w \in W$, ki je vsebovan vsaj v

$$\frac{|E|}{|W|} \geq \frac{(p-1)^{d+1} \cdot (d+1)!}{(p-1) \cdot (d+1)} = (p-1)^d \cdot d!$$

množicah. Izberimo tak element in ga odstranimo iz vseh množic družine ε, ki ga vsebujejo:

$$\varepsilon' := \{e \backslash \{w\} | e \in \varepsilon \; in \; w \in e\}$$

Torej velja $|\varepsilon'| \geq (p-1)^d \cdot d!$. Po indukcijski predpostavki vemo, da družina ε' lahko sestavi sončnico moči p z množicami $\{s_1, s_2, ..., s_p\}$, ki so vse moči d. Če vsem tem množicam dodamo element w, dobimo $\{s_1 \cup \{w\}, s_2 \cup \{w\}, ..., s_p \cup \{w\}\}$, ki tudi tvorijo sončnico moči p s središčem, večjim za 1. $\square$