12. Domača naloga pri predmetu Matematične metode v računalništvu

Slavko Žitnik
63060254

8. junij 2011

Naloga 1

Pokaži:

a) da je parametrizirani problem $p - DOMINATING\ SET$ $W[2]$-poln.

Za problem izpolnljivosti utežene konjunktivne normalne oblike (angl. weighted CNF statisfiability) vemo, da je $W[2]$-poln. Torej če lahko ta problem tesno prevedemo na problem $p - DOMINATING\ SET$, potem bo tudi ta problem $W[2]$-poln.

Dokaz. Naj bo X logični izraz v KNO z m stavki $C_1, C_2, \ldots, C_m$ in n spremenljivkami $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Potem lahko v polinomskem času poiščemo graf $G = (V, E)$, ki vsebuje dominantno množico velikosti $2k$ natanko tedaj, ko je X izpolnljiv s k resničnimi spremenljivkami.

V predlaganem članku je podan še primer konstrukcije na strani 7.

Predpostavimo, da lahko X izpolnimo s k spremenljivkami $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}$ z logično vrednostjo 1. Naj velja urejenost $i_0 < i_2 < \cdots < i_{k-1}$ in naj bo $d_r = i_{r+1(mod\ k)} - i_r (mod\ n)$ za $r = 0, \ldots, k-1$. Iz tega lahko zelo enostavno ugotovimo, da je množica $2k$ točk

$$D = \{a[r, i_r] : 0 \leq r \leq k-1\} \cup \{b[r, i_r, d_r] : 0 \leq r \leq k-1\}$$

dominantna množica v G. Analogno lahko pokažemo v drugo smer, da množica točk iz dominantne množice D izpolni X. $\square$

b) da parametrizirani problem $p - DOMINATING\ SET$, na razredu grafov z omejeno maksimalno stopnjo, pripada FPT.

Naj imamo podan graf G z maksimalno stopnjo d. Naš prilagojen $p - DOMINATING\ SET$ se glasi:

Vhod: Graf $G = (V, E)$, parameter $k \in \mathbb{N}$

Problem: Ali G vsebuje dominantno množico na k elementih?

Sedaj opazimo, da je problem $p - DOMINATING\ SET$ enak problemu $HITTING\ SET$:

$$(V, \{e_v | v \in V\}),\ where\ e_v = \{v\} \cup \{w \in V | \{v, w\} \in E\}\ for\ v \in V.$$

Za problem $HITTING\ SET$ vemo, da pripada fpt, zato mora tudi $p - DOMINATING\ SET$ pripadati fpt, sicer $HITTING\ SET$ ne bi bil v fpt.

Naloga 2

Poišči/opiši vsaj pet različnih parametriziranih $W[1]$-polnih problemov.

Klika (Clique) Vhod: Graf $G = (V, E)$, parameter k
Problem: Ali obstaja množica točk $V' \subseteq V$, $|V'| = k$, da tvori kliko na podgrafu grafa G.

Neodvisna množica (Independent Set) Vhod: Graf $G = (V, E)$, parameter k
Problem: Ali obstaja množica točk $V' \subseteq V$ moči k, da velja $\forall u, v \in V', uv \notin E$?

Problem nahrbtnika (Set packing) Vhod: Družina množic $S = S_1, \ldots, S_n$, parameter k
Problem: Ali množica S vsebuje podmnožico R s k neodvisnimi množicami.

Postov korespondenčni problem (Short PCP) Vhod: Postov sistem π, parameter k.
Problem: Ali obstaja rešitev dolžine k za problem π.

Weighted q-CNF Satisfiability Vhod: q-CNF izraz X (izraz, kjer vsak stavek vsebuje kvečjemu q literalov), parameter k
Problem: Ali lahko X izpolnimo s k resničnimi vhodi.

Naloga 3

Poišči parametriziran problem, ki je $W[1]$-poln, in dokaži njegovo $W[1]$-polnost s fpt-prevedbo iz problema $p - CLIQUE$ ali $p - INDEPENDENT\ SET$.

Izbrali smo si problem $p{-}INDUCIRANEGA\ PODGRAFA\ PO\ POVEZAVAH$ (angl. $p - EDGE - INDUCED - SUBGRAPH$) [1]:

Vhod: Graf G in parameter $k \in \mathbb{N}$

Problem : Število induciranih podgrafov na k povezavah.

Da je problem $p - EDGE - INDUCED - SUBGRAPH$ $W[1]$-poln bomo pokazali tako, da bomo nanj prevedli problem $p - INDEPENDENT\ SET$:

[1] Bingkai Lin and Yijia Chen, The parameterized complexity of k-edge induced subgraphs

Dokaz. Recimo, da so v nadaljevanju inducirani podgrafi lepi - brez izoliranih vozlišč. Naj bo (G, k) primer problema $p - INDEPENDENT\ SET$. Za vsak $i \in [k]$ definirajmo $V_{2i-1} = \{(v, i) | v \in V(G)\}$. Za $i \in [k-1]$ naj velja $V_{2i} = \{e_i\}$, kjer so e_i vse točke, ki niso vsebovane v $V(G)$. Sedaj definirajmo graf H:

$$V(H) = \bigcup_{i \in [2k-1]} V_i$$

$$E(H) = \bigcup_{i \in [k]} \{\{(u, i), (v, i)\} | u, v \in V(G)\ with\ u \neq v\}$$

$$\cup \bigcup_{1 \leq i < j \leq k} \{\{(u, i), (v, j)\} | u = v\ or\ \{u, v\} \in E\}$$

$$\cup \bigcup_{i \in [k-1]} \{\{(v, j), e_i\} | v \in V(G)\ and\ (j = i\ or\ j = i + 1)\}$$

Naj bo $V_i, i \in [2k - 1]$ imenovan *blok* grafa G. Opazimo lahko, da vsak lihi blok predstavlja kliko velikosti $V(G)$ in vsak sodi blok je eno-elementna množica.

Naj bo $\{v_q, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ neodvisna množica moči k v G. Iz tega lahko očitno vidimo, da je

$$G[\{(v_i, i) | i \in [k]\} \cup \{e_i | i \in [k - 1]\}]$$

inducirang podgraf grafa G na $(2k - 2)$ točkah. Velja tudi obratno, torej: Naj bo H' induciran podgraf grafa H z $2k - 2$ povezavami. Če H' seka vse bloke grafa V_i, potem je

$$\{v \in V | za\ nek\ i \in [k]\ velja\ (v, 2i - 1) \in V(H')\}$$

neodvisna množica moči k v G.

Iz tega sledi, da je "(število neodvisnih množic velikosti k v G) $\cdot k! =$ število $(2k - 2)$ po povezavah induciranih podgrafov grafa H, ki sekajo vsak blok V_i" Naš cilj je, da s pomočjo $p - EDGE - INDUCED - SUBGRAPH$ izračunamo desno stran. Za vsak $X \subseteq [2k - 1]$ naj bo

$$H_X = H[\bigcup_{i \in X} V_i]$$

$s_X =$število $(2k - 2)$ po povezavah induciranih podgrafov v H_X
$t_X =$število $(2k - 2)$ po povezavah induciranih podgrafov v H_X, ki sekajo vse bloke V_i
Desna stran je potem enaka $t_{[2k-1]}$.

Vsak s_X lahko izračunamo kot problem $p - EDGE - INDUCED - SUBGRAPH$ na $(H_X, 2k - 2)$. Z dinamičnim programiranjem pa lahko v fpt času s pomočjo $p - EDGE - INDUCED - SUBGRAPH$ izračunamo vsak t_X. □

Naloga 4

Naj bo $p(x)$ polinom oblike

$$p(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_1 x - a_0,$$

pri čemer so vsi koeficienti $a_i, i = 0, \ldots, n-1$, naravna števila (lahko 0). Pazi: koeficienti polinoma (razen vodilnega) so dejansko negativni. Za polinom $p(x)$ zgornje oblike pravimo, da je *trivialen*, če so *vsi* koeficienti $a_i, i = 0, \ldots, n-1$, enaki 0. Pokaži:

a) Netrivialni polinom $p(x)$ ima eno samo pozitivno realno ničlo $\alpha \geq 1$. Premisli, v katerem primeru je $\alpha = 1$ in kdaj je $\alpha > 1$. (Namig: Kako izgleda odvod $p'(x)$?)

Ničla je enaka 1 natanko tedaj, ko je le eden od koeficientov a_i enak 1, ostali pa enaki 0.

$$p(x) = 1 - 1 \cdot a_i = 0$$

V nasprotnem primeru velja obratno.

b) Denimo, da sta polinoma $p_1(x)$ in $p_2(x)$ omenjene oblike, in velja $p_2(x) = p_1(x) - x^{k_1} + x^{k_2}$. Privzameš lahko, da je $k_1 > k_2$. Kakšna je zveza med pozitivnima ničlama α_1 in α_2?

Če vzamemo zgornji primer, da je ena ničla $\alpha_1 = 1$, potem trivialno iz enačbe sledi, da je natanko tedaj tudi $\alpha_2 = 1$.

Če pa je ena od ničel različna od 1, potem lahko sklepamo: Napišimo si sistem enačb, kjer prvič vstavimo v enačbo α_1 in nato α_1 ter ga rešimo:

$$p_2(\alpha_1) = 0 - \alpha_1^{k_1} + \alpha_1^{k_2}$$

$$0 = p_1(\alpha_2) - \alpha_2^{k_1} + \alpha_2^{k_2}$$

.

Naloga 5

Kaj je *homogena linearna rekurzivna enačba s konstantnimi koeficienti* in kako (v najbolj enostavnem primeru) poiščemo njeno splošno rešitev?

Naj bodo $c_0, c_1, \ldots c_d \in \mathbb{C}, c_0, c_d \neq 0$. Potem je

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

homogena linearna rekurzivna enačba s konstantnimi koeficienti za $a_n, n \in \mathbb{N}$ reda d.

Enačbo rešimo s pomočjo karakterističnega polinoma

$$Q(x) = c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0 =$$

$$= c_d (x - \lambda_1)^{s_1} (x - \lambda_2)^{s_2} \ldots (x - \lambda_k)^{s_k}.$$

Iz tega izračunamo splošno rešitev

$$a_n = A_1(n)\lambda_1^n + A_2(n)\lambda_2^n + \cdots + A_k(n)\lambda_k^n,$$

kjer je $A_i(n)$ polinom stopnje $\leq s_i - 1$.